

Η (1) $= B$ όμοιος με D άρα ο B έχει ιδιοτιμές $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$
 που είναι όλες θετικές. Άρα B οριστικά ορισμένος
 Μοναδικότητα: χωρίς απόδειξη

22/5/2017

Ορισμός

Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τετραγ. μορφή. Ο μοναδικός συμμετρικός
 πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ώστε $f = q_A$
 (δηλ. $f(x_1, \dots, x_n) = \text{Tr}((x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})$ για κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$)
 λέγεται ΠΙΝΑΚΑΣ της f .

Πρόταση Έστω $f = q_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τετραγ. μορφή $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος.
 Ορίσουμε την τετραγωνική μορφή $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x_1, \dots, x_n) = f((x_1, \dots, x_n)P)$
 τότε $g = q_B$ όπου $B = PAP^t$.

Απόδ.

Έστω $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ τότε $g(x) = f(xP) = q_A(xP) =$
 $= xPA(xP)^t = x(PAP^t)x^t$

Ανάλυση Έστω $f = q_A$ με $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός. Τότε A ορθογωνιοποιείται.
 Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A . Υπάρχει $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογ. ώστε
 $\tilde{P}^{-1}A\tilde{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ θέτοντας $P = \tilde{P}^{-1}$ έχουμε $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Βήμα 1°

Αλλά P ορθογωνικός πίνακας, άρα $P^{-1} = P^t$, $PAP^t = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Άρα αν θέσουμε $g(x) = f(xP)$, έχουμε $g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$

Βήμα 2°

Θέτουμε $x_i = \begin{cases} y_i & \text{αν } \lambda_i = 0 \\ \frac{y_i}{\sqrt{\lambda_i}} & \text{αν } \lambda_i > 0 \\ \frac{y_i}{\sqrt{-\lambda_i}} & \text{αν } \lambda_i < 0 \end{cases}$

Τότε $g(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i: \lambda_i > 0} y_i^2 - \sum_{i: \lambda_i < 0} y_i^2$

Πρόταση (Θεώρημα του S. Sylvester)

Αποδεικνύεται Αν $f=q_A - q_B$ $I \in I$

i) $f = 220 \text{ cm}^3$ με q

ii) $\# \text{ θετικών ιδιοτιμών του } A = \# \text{ θετικών ιδιοτιμών του } B$
 $\# \text{ μηδενικών} - \# \text{ } = \# \text{ αρνητικών} - \# \text{ } B$
 $\# \text{ αρνητικών} - \# \text{ } = \# \text{ αρνητικών} - \# \text{ } - \# \text{ } - \# \text{ } - \# \text{ } - \# \text{ }$

Ορισμός Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή με πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(δηλ. $f=q_A$ και A συμμετρικός) Έστω P ορθογώνιος πίνακας με

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ όπου } \lambda_i \text{ οι ιδιοτιμές του } A$$

Γράφουμε $P = [e_1 | e_2 | \dots | e_n]$ με $e_i \in \mathbb{R}^n$

Τότε i) Οι κύριοι άξονες της f είναι το σύνολο $\{ \langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle \}$ που αποτελείται από η το πλήθος 1-διάστατους υποχώρους του $\mathbb{R}^n$

ii) "Αναγωγή της f σε κύριους άξονες" εννοούμε την τετραγ. μορφή $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$

ΦΥΛΛΑΔΙΟ #7

Ασκ 6.

Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = 9x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy$$

1. Να αναχθεί η f στους κύριους άξονες, οι οποίοι και να πρεσβευτούν
2. Να δείξετε ότι ο πίνακας A της f είναι θετικά ορισμένος
3. Να βρείτε συμμετρικός και θετ. ορισμένος πίνακας B με $B^2 = A$

Λύση

$$A = \text{πίνακας } f = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Βήμα 1

Έχουμε $\Delta_1 = 9 > 0$, $\Delta_2 = 9 \cdot 6 - (-2)^2 = 50 > 0$

$$\Delta_3 = \det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} > 0 \text{ Άρα } A \text{ θετικά ορισμένος}$$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_3) = (3-x) \cdot (x^2 - 15x + 50) = (x-3)(x-5)(x-10)$$

Άρα $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 10$ (Αφού $\lambda_i > 0 \forall i \Rightarrow A$ θετικά ορισμένος)

Έχουμε ότι η αναγωγή της f σε κύριους άξονες είναι η
 τετραγωνική μορφή $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad g((z_1, z_2, z_3)) = 3z_1^2 + 5z_2^2 + 10z_3^2$

$$VA(\lambda_1) = VA(3) \quad (A - 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Μετά τις πράξεις $VA(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$VA(\lambda_2) = VA(5)$... το $VA(5)$ έχει διάσταση 1 και ορθοκανονική βάση

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$VA(\lambda_3) = VA(10)$ ορθοκ βάση $e_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

Άρα οι κύριοι άξονες της f είναι οι 3 μονοδιαίοι
 υπόχωροι $\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_3 \rangle$ του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$

Θέτουμε $P = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ορθογώνιος

και $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ (δεν είναι αποδ.)

Θέτουμε $B = P \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} P^{-1}$ τότε B συμμετρικός
 θετικά οριζόμενος και $B^2 = A$

ΦΥΜ# 7

Ασκ 4 Να υπολογιστεί το $a \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ να είναι θετικά ορισμένος}$$

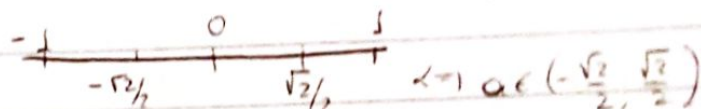
Λύση

μετασχηματισμός

$$\Delta_1 = 1 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 \quad \Delta_3 = 1 - 2a^2$$

$$\text{'Αρα } A \text{ θετικά ορισμένος} \Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a^2 > 0 \\ 1 - 2a^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-1, 1) \\ a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$



Ασκ 5

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικοί θετικά ορισμένοι

και $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ με $a \geq 0, b \geq 0$ και $(a, b) \neq (0, 0)$. Δείξτε ότι

ο πίνακας $aA + bB \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος

Λήμμα $(aA + bB)^t = (aA)^t + (bB)^t = aA^t + bB^t = aA + bB$

Έστω $v \in \mathbb{R}^n$ μη μηδενικός $\neq 0$

$$\text{Tr}(v(aA + bB)v^t) > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } \text{Tr}(v(aA + bB)v^t) &= \text{Tr}((a(vA) + b(vB))v^t) = \\ &= \text{Tr}(a v A v^t + b v B v^t) = \text{Tr}(a v A v^t) + \text{Tr}(b v B v^t) \\ &= a \text{Tr}(v A v^t) + b \text{Tr}(v B v^t) > 0 \end{aligned}$$

γιατί $\begin{matrix} \text{Tr}(v A v^t) > 0 & a \geq 0 \\ \text{Tr}(v B v^t) > 0 & b \geq 0 \end{matrix} \quad (a, b) \neq (0, 0)$

94/17

Ασκ 3 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική

$$f((x, y, z)) = (ax - y + z, -x + by - z, x - y + 2z)$$

i) Βρείτε τα (a, b) ώστε η f να έχει ιδιοτιμή 1 με πολλαπλότητα 2

ii) Για τα a, b του i) βρείτε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f .

iii) Για $m > 0$ βρείτε $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ώστε $B^m = [f]_E^E$ όπου E η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν $f: V \rightarrow V$ η f έχει ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ, ιδίες με αυτές του πίνακα $[f]_E^E$, όπου E βάση του V

$$[f]_E^E = \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & b & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ συμμετρικός}$$

$$\chi_A(x) = -x^3 + bx^2 + ax^2 + 2x^3 - abx - 2bx - 2ax + 3x + 2ab - b - a$$

$$\text{Έχουμε } \chi_A(1) = 4 + ab - 2a - 2b = (b-2)(a-2) \text{ Άρα 2 περιπτώσεις}$$

Περίπτωση 1 $b \neq 2, a = 2$

Περίπτωση 2 $b = 2$

Περίπτωση 1 το $a = 2$ Άρα $\chi_A(x) = -x^3 + (4+b)x^2 + \dots$

$$\text{Ευκλείδεια Διαίρεση } \chi_A(x) = (x-1)(bx - x^2 - 3b + 3x + 2)$$

Αφού $\perp$ διηγήριος του $\chi_A(x)$, πρέπει $\perp$ ρίζα του $\Leftarrow$

$$\text{Όχι πρέπει } b - 1 - 3b + 3 + 2 = 0 \Rightarrow -2b + 4 = 0 \Rightarrow b = 2$$

Αντιφαση αφού είχαμε περίπτ. 1 όπου $b \neq 2$ Άρα η περίπτωση 1 δεν εμφανίζεται.

Περίπτωση 2 $\left\{ \begin{array}{l} b=2 \text{ Με πράξεις όπως στην περίπτωση 1} \\ \text{πρέπει } a=2 \end{array} \right.$ Άρα $a=b=2$ και τότε $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-4)$

Συμπέρασμα πρέπει και άρα $(a, b) = (2, 2)$

$$\text{Τότε } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε $VA(1)$

Έχει διαστάση 2 Έστω y_1, y_2 βάση του $VA(1)$

Με Gram-Schmidt παίρνουμε ορθοκ βάση h_1, h_2 του $VA(1)$

Υπολογίζουμε $VA(4) = \dots$ Έχει διαστάση 1. Έστω h_3 ορθοκ βάση του $VA(4)$. Τότε h_1, h_2, h_3 ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A .

Έστω $h_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Το h_1 ιδιοδιάνυσμα του $A \Rightarrow$

$z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 = (z_1, z_2, z_3) = h_1^t$ ιδιοδιάνυσμα της f

Τελικά h_1^t, h_2^t, h_3^t ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ από ιδιοδιανύσματα της f .

iii) Θέτουμε $P = [h_1 | h_2 | h_3] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ορθογώνιος

$$\text{Τότε } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Θέτουμε } B = P \begin{bmatrix} \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4} \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$V_f(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)$$